

Problème 208 – Être imposteur à Among Us

Niveau : Terminale (Spécialité Maths)

Chapitres : Variables aléatoires, Loi binomiale, Loi des grands nombres, Algorithmique (Python)

Inédit, publié le 11/05/2021



Quand on joue à Among Us, il y a toujours un petit « plus » à être un Imposteur. Savoir se débarrasser avec discrétion des Équipiers et créer la zizanie entre eux pour qu'ils s'éliminent mutuellement lors du vote, exactement comme pour les Loups Garous, crée un plaisir malin. Encore faut-il savoir maîtriser sa posture d'Imposteur avec art, et encore faut-il être choisi en tant qu'Imposteur au début du jeu : c'est, pour ce problème, toute la question...

Martin lance avec 9 de ses amis une série de parties. Ils décident qu'il y aurait à chaque partie 2 Imposteurs (les 8 autres étant des Équipiers). On rappelle que le jeu choisit les Imposteurs de manière totalement aléatoire à chaque partie et indépendamment des parties précédentes.

- 1) a) Calculer le nombre de paires d'Imposteurs possibles que le jeu peut constituer au début de chaque partie.
b) Justifier que la probabilité pour Martin d'être choisi en tant qu'Imposteur est de 0,2.

2) Martin et ses amis font 10 parties ensemble à la suite.

On appelle X la variable aléatoire associée au nombre de parties où Martin est choisi en tant qu'Imposteur.

- a) Justifier la nature de la loi de probabilité suivie par X . Donner $E[X]$ et $V[X]$.
- b) Quelle est la probabilité pour Martin de n'être choisi aucune fois en tant qu'Imposteur sur ces 10 parties ?
- c) Quelle est la probabilité qu'il soit choisi au moins 3 fois ?

3) Suite à ces 10 parties lors de cette première semaine, Martin et ses amis décident de répéter des blocs de 10 parties toutes les semaines.

On appelle X_i la variable aléatoire associée au nombre de parties où Martin est choisi en tant qu'Imposteur lors de la $i^{\text{ème}}$ semaine. On pose M_n la moyenne des X_i sur les n premières semaines où Martin et ses amis jouent.

L'algorithme Python en **Annexe 1** a été écrit avec pour objectif de simuler la situation et de calculer une valeur de M_n dans les hypothèses des questions précédentes, n étant choisi par l'utilisateur au lancement du programme.

- Expliquer dans l'algorithme en **Annexe 1** le rôle de chacune des trois fonctions *EtreImposteur*, *X* et *Mn*.
 - Expliquer le rôle de la ligne 22 du programme.
 - Compléter les pointillés des lignes 27 et 28 de l'algorithme en **Annexe 1** pour qu'il réalise l'objectif expliqué ci-dessus.
- 4) Déterminer une majoration de la probabilité que M_{20} s'écarte de $E[X]$ de plus de 0,5.
- 5) Au bout de combien de semaines n de jeu pourra-t-on considérer que la probabilité que M_n s'écarte de $E[X]$ de plus de 0,5 est inférieure à 5% ?

Annexe 1

```
1 import random
2
3 def EtreImposteur(p):
4     a=random.random()
5     if a<p:
6         return 1
7     else:
8         return 0
9
10 def X(NbParties,p):
11     b=0
12     for k in range(NbParties):
13         if EtreImposteur(p)==1:
14             b+=1
15     return(b)
16
17 def Mn(NbParties,p,NbSemaines):
18     S=0
19     Xi=0
20     for i in range(NbSemaines):
21         Xi=X(NbParties,p)
22         print("En semaine",i+1,"Martin a été choisi",Xi,"fois")
23         S+=Xi
24     M=S/NbSemaines
25     return(M)
26
27 n=.....
28 M=.....
29 print(M)
```